GROUPE A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les candidats sont invités à lire l'énoncé attentivement. Lors de la correction, il sera tenu compte de la présentation des copies et de la précision des arguments utilisés.

Lorsque la réponse à une question posée ne figure pas dans l'énoncé, le candidat commencera par formuler clairement le résultat qu'il propose de démontrer avant d'en aborder la démonstration.

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ sa k-ième dérivée; on a ainsi $f = f^{(0)}$, $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, etc.

Pour $k \in \mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$, on note C_0^k l'espace vectoriel des fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continues, k fois dérivables, dont la dérivée k-ième $f^{(k)}$ est continue et telles qu'il existe un réel $R > 0$ (dépendant de f) vérifiant $f(x) = 0$ pour $x \notin [-R, +R]$.

Si $f \in C_0^k$, pour $0 \leqslant j \leqslant k$ on pose : $\quad \|f\|_j = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f^{(j)}(x)|$ $\quad$ ($|y|$ désigne la valeur absolue du réel y).

Si $a_1, \dots, a_n$ est une suite de n réels, on notera $\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ leur produit.

Si $\{ x_i \}_{i \in I}$ est une famille de réels indexée par un ensemble fini I, on note $\sum\limits_{i \in I} x_i$ leur somme.

Par convention, cette somme est nulle si I est vide.

La 3e partie est indépendante des parties 1 et 2.

PREMIÈRE PARTIE

Pour $u \in C_0^0$ et $a > 0$ on pose, pour x réel : $\quad M_a(u)(x) = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{x-a}^{x} u(t)\, dt$.

1. Démontrer que $M_a(u) \in C_0^1$, et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} M_a(u)(x)\, dx$ en fonction de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, dx$.

2. Vérifier qu'on a $M_a[M_b(u)] = M_b[M_a(u)]$ pour $u \in C_0^0$, $a > 0$, $b > 0$.

3. Démontrer que pour $u \in C_0^1$, on a pour tout x réel : $\quad |M_a(u)(x) - u(x)| \leqslant \dfrac{a}{2} \|u\|_1$.

4. Démontrer que pour $u \in C_0^k$, on a $M_a(u) \in C_0^{k+1}$ et $\|M_a(u)\|_j \leqslant \|u\|_j$ pour $0 \leqslant j \leqslant k$.

Soit $\{ a_i \}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels strictement positifs. On définit une suite de fonctions u_k en posant :

$$\begin{cases} u_0(x) = \dfrac{1}{a_0} \quad \text{si } x \in [0, a_0], \qquad u_0(x) = 0 \quad \text{si } x \notin [0, a_0] \\ u_1(x) = \dfrac{1}{a_1} \displaystyle\int_{x-a_1}^{x} u_0(t)\, dt \\ u_k = M_{a_k}(u_{k-1}) \quad \text{pour } k \geqslant 2. \end{cases}$$

Tournez la page S. V. P.

5. Calculer u_1 et montrer que $u_{k+1} \in C_0^k$ pour $k \geqslant 0$.

6. Pour quelles valeurs de x a-t-on $u_k(x) > 0$, $u_k(x) = 0$? $(k \geqslant 1)$.

7. Démontrer qu'on a $\| u_k \|_j \leqslant 2^j \left(\prod_{0 \leqslant l \leqslant j} a_l \right)^{-1}$ pour $j \leqslant k-1$, $k \geqslant 1$.

On suppose de plus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$.

8. Démontrer que la suite u_k converge uniformément sur R vers une fonction u non identiquement nulle.

9. Démontrer que $u \in C_0^m$ pour tout m et qu'on a : $\forall j \in \mathbf{N} \quad \| u \|_j \leqslant 2^j \left(\prod_{0 \leqslant l \leqslant j} a_l \right)^{-1}$

Deuxième partie

On munit $\mathbf{Z}^2$ de sa base canonique $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Pour $P \in \mathbf{Z}^2$, on note $V(P) = \{ P + e_1, P + e_2 \}$. On appelle chemin de longueur l (l entier positif ou nul) une suite $c = (P(0), P(1), \ldots, P(l))$ de $l+1$ points de $\mathbf{Z}^2$ vérifiant $P(0) = (0,0)$, $P(i+1) \in V(P(i))$ pour $0 \leqslant i < l$.

1. Combien y a-t-il de chemins de longueur l ?

Soit $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m$ une suite décroissante de m réels strictement positifs. On note W la partie de $\mathbf{Z}^2$:

$$W = \{ (i,j) ; \ 0 \leqslant i < m, \ 0 \leqslant j < m, \ a_{j+1} \geqslant a_{i+1} \}.$$

2. Dessiner W pour $m = 6$, $a_1 > a_2 = a_3 > a_4 = a_5 = a_6$.

Pour tout $l \geqslant 0$, on note C_l l'ensemble des chemins $c = (P(0), \ldots, P(l))$ qui vérifient $P(i) \in W$ pour $i < l$ et on pose :

$$\dot{C}_l = \{ c = (P(0), \ldots, P(l)) \in C_l, \quad P(l) \notin W \}.$$

Soit $u \in C_0^m$ ($m \geqslant 1$). Pour $c \in C_l$, on définit une fonction $u_c \in C_0^m$, par récurrence sur l en posant :

Si $c = (P(0))$ $u_c = u$;
Si $c = (P(0), \ldots, P(l), P(l+1))$, $c' = (P(0), \ldots, P(l))$, $P(l) = (i,j)$;
$u_c(x) = u_{c'}(x - a_{j+1})$ lorsque $P(l+1) = P(l) + e_1$;
$u_c(x) = a_{j+1} M_{a_{j+1}}(u_{c'}^{(1)})(x)$ lorsque $P(l+1) = P(l) + e_2$.

3. Démontrer que pour tout $l \geqslant 1$, on a : $u = \sum_{j \leqslant l-1} \left(\sum_{c \in \dot{C}_j} u_c \right) + \sum_{c \in C_l} u_c$.

4. En déduire que, si $u(y) = 0$ pour $y \leqslant 0$, on a pour tout $x \leqslant a_1 + \ldots + a_m$: $|u(x)| \leqslant \sum_{j \in J} 2^{2j} \left(\prod_{1 \leqslant l \leqslant j} a_l \right) \| u \|_j$

avec $J = \{ j \in \{ 1, \ldots, m \}, \ j = m \text{ ou } a_{j+1} < a_j \}$.

Troisième partie

Soit $\{ B_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant $B_0 = 1$. On pose, pour $j \in \mathbf{N}$:

$L_j = \inf_{k \geqslant j} B_k^{\frac{1}{k}}$ $\quad B_j = \exp(S_j)$ et on suppose $\lim_{j \to \infty} L_j = +\infty$.

Tournez la page S.V.P.

Soit $D = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall j \in \mathbb{N} \ \ aj + b \leqslant S_j \}$.

1. Démontrer que pour tout $a > 0$, il existe b tel que $(a, b) \in D$.

Pour $x \geqslant 0$, on pose $S^*(x) = \sup \{ ax + b ; (a, b) \in D \}$.

2. Montrer que $S^*(x)$ est fini pour tout $x \geqslant 0$, que la fonction S^* est convexe, affine sur chaque intervalle $[j, j+1]$ $(j \in \mathbb{N})$ et qu'on a $\lim_{x \to \infty} \frac{S^*(x)}{x} = + \infty$.

On pose $S_j^* = S^*(j)$, $B_j^* = \exp S_j^*$ et pour $j \geqslant 1$ $\quad a_j = \frac{B_{j-1}^*}{B_j^*}$.

3. Démontrer que pour tout $j \geqslant 1$ on a $a_{j+1} \leqslant a_j$, que l'ensemble $J = \{ j ; a_{j+1} < a_j \}$ est infini, et que pour $j \in J$ on a $S_j = S_j^*$.

4. Pour $j \geqslant 1$, classer par ordre croissant les trois réels L_j, $(B_j^*)^{\frac{1}{j}}$, $\frac{1}{a_j}$.

5. *a.* Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels positifs, on a $\left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} (x_1 + \ldots + x_n)$;

b. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad (e = \exp(1))$. (On utilisera l'inégalité précédente avec $x_i = c_i a_i$ en choisissant convenablement les c_i.)

6. Démontrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{L_j} = + \infty \qquad (ii) \ \sum_{j=1}^{\infty} (B_j^*)^{-\frac{1}{j}} = + \infty \qquad (iii) \ \sum_{j=1}^{\infty} a_j = + \infty .$$

Quatrième partie

Soit $f \in C_0^m$ pour tout m. On suppose qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f\|_n \leqslant A^{1+n} B_n$ où $\{ B_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs avec $B_0 = 1$. On pose $L_j = \inf_{k > j} B_k^{\frac{1}{k}}$.

1. On suppose la suite L_j bornée. Démontrer que $f = 0$.

2. On suppose $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{L_j} = + \infty$. Démontrer que $f = 0$.

3. Que peut-on dire si $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{L_j} < + \infty$?

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail